Chapitre 10 : Suites numériques

Table des matières

1 Généralités sur les suites réelles

Une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ définie à partir du rang $n_0 \in \mathbb{N}$ est une application de $[\![n_0, +\infty[\![$ dans $\mathbb{R}$.
L'image d'un entier n par cette suite est appelé terme de rang n de la suite et il est noté u_n ; n_0 est le rang initial de la suite. On notera plus simplement (u_n) la suite définie depuis le rang à partir duquel u_n a un sens.
Toutes les définitions et propriétés du cours seront énoncées pour des suites définies à partir du rang 0, mais s'adaptent facilement pour des suites définies à partir d'un rang quelconque $n_0 \in \mathbb{N}$.

Remarque : L'ensemble des suites réelles définies à partir du rang 0 se note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Mode de définition d'une suite réelle :

- Explicite : le terme général est exprimé en fonction de n. Exemple : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n$.
- Implicite : le terme général est solution d'une équation dépendante de n. Exemple : $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est l'unique solution de l'équation d'inconnue réelle x : $x\ln(x) = n$.
- Par récurrence : le terme général est définie pour les premiers termes et la suite vérifie une relation de récurrence. Exemple : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1.1 Propriété vérifiée à partir d'un certain rang

On dit qu'une propriété portant sur une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est vraie à partir d'un certain rang s'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que cette propriété soit vraie pour la suite $(u_n)_{n\geqslant N}$. *Notation : $n \geqslant N$ est un raccourci pour $n \in [\![N, +\infty[\![$.*

Définition 1.1 (suite stationnaire)

On dit qu'une suite (u_n) est stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang.

Ceci signifie : $\exists N \in \mathbb{N}$, $\exists k \in \mathbb{R}$, $\forall n \geqslant N$, $u_n = k$, ou encore : $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant N$, $u_{n+1} = u_n$.

1.2 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 1.2 (suites majorées, minorées, bornées)

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que :

1. (u_n) est majorée lorsque $\{u_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$, ce qui s'écrit :
2. (u_n) est minorée lorsque $\{u_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ est une partie minorée de $\mathbb{R}$, ce qui s'écrit :
3. (u_n) est bornée lorsqu'elle est majorée et minorée, ce qui s'écrit :

Proposition 1.3 (suites majorées à partir d'un certain rang)

Soit (u_n) une suite réelle majorée à partir d'un certain rang, *i.e.* $\exists N \in \mathbb{N}$, $\exists M \in \mathbb{R}$, $\forall n \geqslant N$, $u_n \leqslant M$.
Alors la suite (u_n) est majorée.

On a un résultat similaire pour les suites minorées ou bornées à partir d'un certain rang.

Proposition 1.4 (caractérisation des suites bornées)

Une suite réelle (u_n) est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)$ est majorée.

Proposition 1.5 (propriétés de stabilité pour les suites bornées)

L'ensemble des suites réelles bornées est stable par combinaison linéaire et par produit.

1.3 Monotonie

Définition 1.6 (monotonie d'une suite)

On dit qu'une suite réelle (u_n) est croissante si elle est croissante en tant que fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\, p \leqslant q \implies u_p \leqslant u_q$$

On définit de même les notions de stricte croissance, décroissance, stricte décroissance, monotonie et stricte monotonie.

Proposition 1.7 (caractérisation pratique de la monotonie pour une suite)

Soit (u_n) une suite réelle.

1. (u_n) est croissante si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} \geqslant u_n$.
2. (u_n) est strictement croissante si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} > u_n$.
3. (u_n) est décroissante si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} \leqslant u_n$.
4. (u_n) est strictement décroissante si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} < u_n$.

Remarque : En pratique pour étudier la monotonie d'une suite, on se ramène le plus souvent à étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

2 Limite d'une suite réelle

2.1 Définition de la limite

Notation : On pose $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\,;-\infty\}$. L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ est appelé droite réelle achevée.

Définition 2.1 ($u_n \to \ell$)

Soit (u_n) une suite réelle, et soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
On définit la propriété « u_n tend vers ℓ lorsque n tend vers $+\infty$ », que l'on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ ou plus simplement $u_n \to \ell$, de la manière suivante :

1. cas où $\ell \in \mathbb{R}$: $\boxed{u_n \to \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\, \exists N \in \mathbb{N},\, \forall n \geqslant N,\, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon}$
2. cas où $\ell = +\infty$: $\boxed{u_n \to +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R},\, \exists N \in \mathbb{N},\, \forall n \geqslant N,\, u_n \geqslant A}$
3. cas où $\ell = -\infty$: $\boxed{u_n \to -\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R},\, \exists N \in \mathbb{N},\, \forall n \geqslant N,\, u_n \leqslant A}$

Dans le cas où $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que la suite (u_n) converge vers ℓ.
Dans le cas où $\ell \in \{+\infty, -\infty\}$, on dit que la suite (u_n) diverge vers ℓ.

Remarques :

1. « $\forall \varepsilon > 0$ » est un raccourci pour « $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ ».
2. On a les équivalences suivantes : $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon \Leftrightarrow u_n \in [\ell - \varepsilon\,;\ell + \varepsilon]$.
Cette propriété signifie « u_n est une valeur approchée de ℓ à ε près ».
3. Les inégalités larges portant sur u_n ou sur $|u_n - \ell|$ peuvent être remplacées par des inégalités strictes, sans en changer le sens global. On peut également remplacer « $A \in \mathbb{R}$ » par « $A \in \mathbb{R}_+$ » (resp. « $A \in \mathbb{R}_-$ ») dans le cas où $\ell = +\infty$ (resp. $\ell = -\infty$).
Par contre, on ne peut pas remplacer « $\forall \varepsilon > 0$ » par « $\forall \varepsilon \geqslant 0$ ».
4. Soit (u_n) une suite réelle et soit $\ell \in \mathbb{R}$.
On a les équivalences suivantes :
$$u_n \to \ell \quad \Leftrightarrow \quad u_n - \ell \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad |u_n - \ell| \to 0$$
Pour montrer une convergence vers $\ell \in \mathbb{R}$, on peut donc se ramener à montrer une convergence vers 0.

Théorème 2.2 (unicité de la limite)

Soit (u_n) une suite réelle.
On suppose qu'il existe ℓ et ℓ' dans $\overline{\mathbb{R}}$ tels que $u_n \to \ell$ et $u_n \to \ell'$.
Alors $\ell = \ell'$.

Définition 2.3 (limite d'une suite)

Soit (u_n) une suite réelle.
S'il existe $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $u_n \to \ell$, alors ℓ est appelé <u>la limite</u> de la suite (u_n).
Cette limite est notée $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ ou plus simplement $\lim u_n$.
On dit que cette limite est <u>finie</u> lorsque $\ell \in \mathbb{R}$.

Remarque : L'écriture $\lim u_n = \ell$ signifie deux choses :

1. la limite de (u_n) existe ;
2. cette limite est égale à ℓ.

Il est interdit d'écrire « $\lim u_n$ » **avant d'en avoir montré l'existence.**
Afin d'éviter ceci, on préférera utiliser l'écriture « $u_n \to \ell$ » plutôt que « $\lim u_n = \ell$ ».

Définition 2.4 (suite convergente, suite divergente)

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que la suite (u_n) est :

1. <u>convergente</u> lorsqu'elle possède une limite finie ℓ.
2. <u>divergente</u> lorsqu'elle n'est pas convergente.

Remarque : Une suite réelle divergente est donc une suite qui n'admet pas de limite ou qui admet une limite infinie.

2.2 Liens entre suites bornées et limites

Théorème 2.5 (une suite convergente est bornée)

Soit (u_n) une suite réelle convergente. Alors (u_n) est bornée.

Théorème 2.6 (une suite qui admet une limite infinie n'est pas bornée)

Soit (u_n) une suite réelle.

1. Si (u_n) diverge vers $+\infty$, alors (u_n) n'est pas majorée.
2. Si (u_n) diverge vers $-\infty$, alors (u_n) n'est pas minorée.

En particulier, si (u_n) diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$, alors elle n'est pas bornée.

2.3 Opérations sur les limites

2.3.1 Somme de deux suites

Théorème 2.7 (limite d'une somme)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$, avec ℓ et ℓ' dans $\overline{\mathbb{R}}$.

1. Si ℓ et $\ell' \in \mathbb{R}$, alors $u_n + v_n \to \ell + \ell'$.
2. Si $\ell = \ell' \in \{+\infty\,;-\infty\}$, alors $u_n + v_n \to \ell$.
3. Si $\ell \in \{+\infty\,;-\infty\}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$, alors $u_n + v_n \to \ell$.

Remarque : On ne peut rien dire a priori lorsque $u_n \to +\infty$ et $v_n \to -\infty$ (forme indéterminée).

2.3.2 Multiplication d'une suite par un scalaire

Théorème 2.8 (limite de λu_n)

Soient (u_n) une suite réelle et $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que $u_n \to \ell$, avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Si $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u_n \to \lambda\ell$.
2. Si $\ell = \pm\infty$ et $\lambda \neq 0$, alors $\lambda u_n \to \pm\infty$, le signe devant ∞ étant déterminé par la règle des signes.

On en déduit les règles pour déterminer les limites éventuelles de l'opposé d'une suite, d'une différence de suites, d'une combinaison linéaire de suites.

Proposition 2.9 (somme d'une suite convergente et d'une suite divergente)

La somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est une suite divergente.

2.3.3 Produit de deux suites

Théorème 2.10 (produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle)

Le produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle est une suite de limite nulle.

Théorème 2.11 (limite d'un produit)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.
On suppose que $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$, avec ℓ et ℓ' dans $\overline{\mathbb{R}}$.

1. Si ℓ et $\ell' \in \mathbb{R}$, alors $u_n v_n \to \ell\ell'$.
2. Si ℓ et $\ell' \in \{+\infty\,;-\infty\}$, alors $u_n v_n \to \pm\infty$, le signe devant ∞ étant déterminé par la règle des signes.
3. Si $\ell = \pm\infty$ et $\ell' \in \mathbb{R}^*$, alors $u_n v_n \to \pm\infty$, le signe devant ∞ étant déterminé par la règle des signes.

Remarque : On ne peut rien dire a priori lorsque $u_n \to \pm\infty$ et $v_n \to 0$ (forme indéterminée).

Corollaire 2.12 (propriétés de stabilité pour les suites convergentes)

L'ensemble des suites réelles convergentes est stable par combinaison linéaire et par produit.

2.3.4 Inverse d'une suite

Lemme 2.13 (signe à partir d'un certain rang d'une suite possédant une limite non nulle)

Soit (u_n) une suite réelle.

1. Si $u_n \to \ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.
2. Si $u_n \to \ell \in \mathbb{R}_-^* \cup \{-\infty\}$, alors $u_n < 0$ à partir d'un certain rang.

En particulier, si (u_n) admet une limite non nulle, alors à partir d'un certain rang, $u_n \neq 0$ et garde le même signe.

Notation : On dit que $u_n \to 0^+$ lorsque $u_n \to 0$ et $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.
On dit que $u_n \to 0^-$ lorsque $u_n \to 0$ et $u_n < 0$ à partir d'un certain rang.

Théorème 2.14 (limite de l'inverse d'une suite)

Soit (u_n) une suite réelle.

1. Si $u_n \to \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\dfrac{1}{u_n} \to \dfrac{1}{\ell}$.
2. Si $u_n \to +\infty$ (respectivement $-\infty$), alors $\dfrac{1}{u_n} \to 0^+$ (respectivement 0^-).
3. Si $u_n \to 0^+$ (resp. 0^-), alors $\dfrac{1}{u_n} \to +\infty$ (respectivement $-\infty$).

(Dans chacun des cas, $\dfrac{1}{u_n}$ est bien défini à partir d'un certain rang.)

On en déduit les règles pour déterminer la limite éventuelle du quotient de deux suites.

3 Limites et inégalités larges

Remarque : Les théorèmes ci-dessous restent vrais si l'on suppose seulement que les inégalités soient vérifiées à partir d'un certain rang.

3.1 Passage à la limite dans les inégalités larges

Théorème 3.1 (Positivité de la limite d'une suite positive convergente)

Soient (u_n) une suite réelle telle que $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Si (u_n) converge alors $\lim u_n \geqslant 0$.

Remarque : Les inégalités strictes ne sont pas nécessairement préservées par passage à la limite.
Contre-exemple : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$ mais $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Corollaire 3.2 (stabilité des inégalités larges par passage à la limite)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Si chacune de ces deux suites converge alors $\lim u_n \leqslant \lim v_n$.

3.2 Existence de limites par majoration et/ou minoration

Théorème 3.3 (théorème de convergence par encadrement, ou théorème des gendarmes)

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles telles que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la **même limite** (finie), alors la suite (v_n) converge et on a l'égalité $\lim u_n = \lim v_n = \lim w_n$.

Théorème 3.4 (théorème de divergence par minoration ou majoration)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Si $u_n \to +\infty$, alors $v_n \to +\infty$.
2. Si $v_n \to -\infty$, alors $u_n \to -\infty$.

3.3 Existence de limites par monotonie

Théorème 3.5 (théorème de la limite monotone)

Toute suite monotone admet une limite. Plus précisément :

1. Soit (u_n) une suite croissante.
   (a) Si (u_n) est majorée, alors elle converge.
   (b) Sinon, (u_n) diverge vers $+\infty$.
2. Soit (u_n) une suite décroissante.
   (a) Si (u_n) est minorée, alors elle converge.
   (b) Sinon, (u_n) diverge vers $-\infty$.

4 Suites adjacentes

Définition 4.1 (suites adjacentes)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.
On dit que ces deux suites sont adjacentes lorsque :

1. l'une des deux est croissante ;
2. l'autre est décroissante ;
3. leur différence converge vers 0.

Lemme 4.2

Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes, avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante.
Alors $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 4.3 (théorème des suites adjacentes)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles adjacentes.
Alors ces deux suites convergent vers la même limite.

Exemple 4.4 : Montrer que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ converge.
On pourra introduire la suite de terme général $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

5 Suites extraites

5.1 Définition

Définition 5.1 (suite extraite)

Soient (u_n) une suite.
Une suite extraite (ou sous-suite) de (u_n) est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})$, avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante.
Une telle fonction φ est appelée fonction extractrice.

Exemple 5.2 : Soit (u_n) une suite. Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont des suites extraites de (u_n).

Remarque : Si φ est une fonction extractrice, on a $\varphi(n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (récurrence immédiate), et par conséquent $\varphi(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

5.2 Suites extraites et limites

Théorème 5.3 (limite d'une suite extraite)

Si une suite possède une limite, alors toutes ses suites extraites possèdent la même limite.

Application : Pour montrer qu'une suite ne possède pas de limite, il suffit de trouver deux suites extraites qui ont des limites différentes. Par exemple, la suite $((-1)^n)$ est divergente, car $\lim (-1)^{2n} = 1$ et $\lim (-1)^{2n+1} = -1$.

Théorème 5.4 (existence d'une limite grâce aux termes d'indices pairs et impairs)

Soit (u_n) une suite réelle, et soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si $u_{2n} \to \ell$ et $u_{2n+1} \to \ell$, alors $u_n \to \ell$.

Remarque : Il en est de même si les trois suites $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers la même limite.

6 Traduction séquentielle de propriétés portant sur les réels

6.1 Approximations décimales d'un réel

Définition 6.1 (valeur approchée d'un réel)

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
Une <u>valeur approchée de x à ε près</u> est un réel y tel que $|x - y| \leqslant \varepsilon$, *i.e.* $y \in [x - \varepsilon\,, x + \varepsilon]$.
Si $y \leqslant x$, on dit que y est une valeur approchée <u>par défaut</u>.
Si $y \geqslant x$, on dit que y est une valeur approchée <u>par excès</u>.

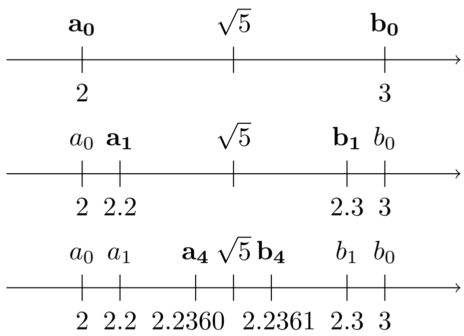
Remarque : L'inégalité $|x - y| \leqslant \varepsilon$ signifie que la distance entre x et y est inférieure (ou égale) à ε.

Théorème 6.2 (valeurs décimales approchées d'un réel à 10^{-n} près)

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Le décimal $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ est une valeur approchée de x à 10^{-n} près par défaut.
2. Le décimal $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$ est une valeur approchée de x à 10^{-n} près par excès.

Exemple 6.3 : Prenons $x = \sqrt{5}$ et considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $b_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$.



Corollaire 6.4 (densité des décimaux et des rationnels)

Tout réel est limite d'une suite de décimaux. En particulier, tout réel est limite d'une suite de rationnels.

6.2 Bornes supérieures et inférieures

Théorème 6.5 (caractérisation séquentielle de la borne supérieure / inférieure)

1. Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, et soit $M \in \mathbb{R}$.

$$M = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \text{il existe une suite d'éléments de } A \text{ qui converge vers } M \end{cases}$$

2. Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, et soit $m \in \mathbb{R}$.

$$m = \inf(A) \Leftrightarrow \begin{cases} m \text{ est un minorant de } A \\ \text{il existe une suite d'éléments de } A \text{ qui converge vers } m \end{cases}$$

Cas des parties non majorées/minorées :

Théorème 6.6 (caractérisation des parties non majorées / non minorées de $\mathbb{R}$)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. A est non majorée si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui diverge vers $+\infty$.
2. A est non minorée si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui diverge vers $-\infty$.

7 Suites complexes

Une suite complexe $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ définie à partir du rang $n_0 \in \mathbb{N}$ est une application de $[\![n_0, +\infty [\![$ dans $\mathbb{C}$.
Toutes les définitions et propriétés seront énoncées pour des suites définies à partir du rang 0.

Remarque : L'ensemble des suites complexes définies à partir du rang 0 se note $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Attention ! Toutes les notions et propriétés faisant intervenir la relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ (ex. : suites majorées, minorées, monotones) n'ont aucun sens pour les suites complexes.

7.1 Suites bornées

Définition 7.1 (suite complexe bornée)

Soit (u_n) une suite complexe.
On dit que (u_n) est bornée lorsque la suite réelle $(|u_n|)$ est majorée, *i.e.* $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M$.

Remarque : L'inégalité triangulaire $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ est souvent utile pour montrer qu'une suite est bornée.

De même que pour les suites réelles :

1. Une suite complexe bornée à partir d'un certain rang est bornée.
2. L'ensemble des suites complexes bornées est stable par combinaison linéaire et par produit.

7.2 Suites convergentes

Définition 7.2 ($u_n \to \ell$ pour une suite complexe)

Soit (u_n) une suite complexe, et soit $\ell \in \mathbb{C}$.
On dit que la suite (u_n) converge vers ℓ, ce que l'on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ ou plus simplement $u_n \to \ell$, lorsque :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon}$$

Remarques :

1. Dans $\mathbb{C}$, il n'y a pas de notion de divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$.
   La seule propriété qui peut avoir un sens est la divergence en module vers $+\infty$: $|u_n| \to +\infty$.
2. Ici, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ s'interprète géométriquement par « u_n est dans le disque fermé de centre ℓ et de rayon ε ».
3. $u_n \to \ell$ si et seulement si la suite réelle $(|u_n - \ell|)$ converge vers 0.

Comme pour les suites réelles, on a **unicité de la limite**, ce qui permet de la noter $\lim u_n$ lorsque cette limite existe. Les résultats suivants restent vrais pour les suites complexes :

1. Toute suite convergente est bornée.
2. Le produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle est une suite de limite nulle.

Théorème 7.3 (opérations sur les limites)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites complexes convergentes, de limites respectives ℓ et $\ell' \in \mathbb{C}$. Alors :

1. $u_n + v_n \to \ell + \ell'$.
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda u_n \to \lambda \ell$.
3. $u_n \times v_n \to \ell\ell'$.
4. Si $\ell \neq 0$, $\dfrac{1}{u_n} \to \dfrac{1}{\ell}$.
5. Si $\ell' \neq 0$, $\dfrac{u_n}{v_n} \to \dfrac{\ell}{\ell'}$.

Par conséquent, l'ensemble des suites complexes convergentes est stable par combinaison linéaire et par produit.

Proposition 7.4 (convergence du conjugué et du module)

Soit (u_n) une suite complexe qui converge vers $\ell \in \mathbb{C}$.
Alors $\overline{u_n} \to \overline{\ell}$ et $|u_n| \to |\ell|$.

Théorème 7.5 (caractérisation de la limite à l'aide des parties réelle et imaginaire)

Soit (u_n) une suite complexe, et soit $\ell \in \mathbb{C}$. On a l'équivalence suivante :

$$u_n \to \ell \Leftrightarrow \begin{cases} \mathfrak{Re}(u_n) \to \mathfrak{Re}(\ell) \\ \mathfrak{Im}(u_n) \to \mathfrak{Im}(\ell) \end{cases}$$

7.3 Suites extraites

La définition de suite extraite est la même que pour les suites réelles.
Les résultats suivants restent valables pour les suites complexes :

1. Si une suite est convergente, alors toutes ses suites extraites convergent vers la même limite.
2. Si les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite ℓ, alors la suite (u_n) converge vers ℓ.

8 Exemples de suites définies par récurrence

Tous les résultats sont ici énoncés pour des suites réelles ou complexes définies à partir du rang 0 (suites dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, avec $\mathbb{K}$ qui désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

8.1 Relations de récurrences linéaires d'ordre 1 à coefficients constants

8.1.1 Suites arithmétiques

Définition 8.1 (suite arithmétique)

Une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est dite arithmétique s'il existe $a \in \mathbb{K}$, appelé raison, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = u_n + a$$

Théorème 8.2 (expression d'une suite arithmétique)

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $a \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = u_0 + na$$

Remarque : Pour tous entiers naturels n et p, on a aussi :

$$u_n = u_p + (n-p)a$$

(à utiliser lorsque la suite n'est pas définie à partir du rang 0).

8.1.2 Suites géométriques

Définition 8.3 (suite géométrique)

Une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est dite géométrique s'il existe $a \in \mathbb{K}$, appelé raison, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = a u_n$$

Théorème 8.4 (expression d'une suite géométrique)

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $a \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = u_0\, a^n$$

Remarque : Pour tous entiers naturels $n \geqslant p$, on a aussi :

$$u_n = u_p\, a^{n-p}$$

(à utiliser lorsque la suite n'est pas définie à partir du rang 0).

8.1.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 8.5 (suite arithmético-géométrique)

Une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est dite arithmético-géométrique s'il existe a et $b \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = a u_n + b$$

Théorème 8.6 (expression d'une suite arithmético-géométrique)

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique, vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$$

avec a et $b \in \mathbb{K}$. On suppose ici que $a \neq 1$ (sinon la suite est arithmétique).
Soit c l'unique solution de l'équation $x = ax + b$. *On dit que c est le point fixe (ou la solution constante).*
Alors la suite $(u_n - c)$ est une suite géométrique de raison a.
En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (u_0 - c)\, a^n + c$$

Exemple 8.7 : Donner une forme explicite de la suite (u_n) telle que $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2(u_n + 1)$.

8.2 Relations de récurrences linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants

On considère ici des relations de récurrence du type suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$$

avec a et b dans $\mathbb{K}$. On suppose en outre que $(a,b) \neq (0,0)$ (sinon, la suite est nulle à partir du rang 2).

Théorème 8.8 (expression complexe d'une telle suite)

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation de récurrence ci-dessus.
On définit l'équation caractéristique associée :

$$(E_c) : \quad r^2 + ar + b = 0$$

1. Si (E_c) possède deux solutions distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{C}$ (cas où $a^2 - 4b \neq 0$), alors il existe λ et $\mu \in \mathbb{C}$ tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda\, r_1^n + \mu\, r_2^n$$
2. Si (E_c) possède une unique solution (double) r_1 dans $\mathbb{C}$ (cas où $a^2 - 4b = 0$), alors il existe λ et $\mu \in \mathbb{C}$ tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda\, r_1^n + \mu\, n r_1^n$$

De plus, dans chaque cas, les nombres complexes λ et μ sont déterminés de manière unique par les deux premiers termes u_0 et u_1.

Expression réelle d'une telle suite : Dans le cas où la suite (u_n) ainsi que les coefficients a et b sont réels, on peut exprimer le terme général u_n en fonction de réels uniquement :

1. Si (E_c) possède deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 (cas où $a^2 - 4b > 0$), alors il existe λ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda\, r_1^n + \mu\, r_2^n$$
2. Si (E_c) possède une unique solution réelle (double) r_1 (cas où $a^2 - 4b = 0$), alors il existe λ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda\, r_1^n + \mu\, n r_1^n$$
3. Si (E_c) possède deux solutions complexes conjuguées distinctes (cas où $a^2 - 4b < 0$), alors on peut écrire ces solutions sous forme trigonométrique $\rho\, \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$ et $\rho\, \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, et il existe alors λ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda\, \rho^n \cos(n\theta) + \mu\, \rho^n \sin(n\theta)$$

Exemple 8.9 : La *suite de Fibonacci* est la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Déterminer une forme explicite de la suite de Fibonacci.

8.3 Suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

On considère ici des suites réelles définies par leur premier terme u_0 et une relation de récurrence du type :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = f(u_n)$$

où f est une fonction de D dans $\mathbb{R}$, avec $D \subset \mathbb{R}$.
Une telle suite est bien définie si et seulement si chaque terme u_n est dans l'ensemble de définition D de la fonction.

Exemple 8.10 : Soit (u_n) telle que $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = \mathrm{Arccos}(u_n)$. La suite (u_n) est-elle bien définie ?

Définition 8.11 (partie stable)

Soit une fonction $f : E \to F$ (avec E et F des ensembles non vides).
Une partie stable par f est une partie A de E telle que $f(A) \subset A$, *i.e.* telle que : $\forall x \in A,\, f(x) \in A$.

Proposition 8.12 (existence et unicité d'une suite définie par une relation de récurrence)

Soit $f : D \to \mathbb{R}$, avec $D \subset \mathbb{R}$, et soit $S \subset D$ une partie stable par f.
Alors, pour tout $y \in S$, il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\begin{cases} u_0 = y \\ \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
De plus, $u_n \in S$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On ne sait pas toujours déterminer explicitement l'expression d'une telle suite (u_n).
On peut néanmoins étudier certaines propriétés de la suite : monotonie, nature, ...
Ces propriétés peuvent être conjecturées en utilisant une représentation graphique « en escalier » ou « en spirale ».

Monotonie
Les résultats théoriques suivants ne sont pas exigibles : ils sont à savoir retrouver dans des cas particuliers.
On considère une suite réelle (u_n) telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ (avec f une fonction réelle) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Si f est croissante, alors la suite (u_n) sera monotone.
- Si f est décroissante, alors les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) seront monotones et de sens de variation opposés.
- Si f est quelconque, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Convergence

Théorème 8.13 (condition nécessaire de convergence)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle non trivial, et soit (u_n) une suite réelle qui vérifie la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers une limite ℓ qui est dans I, et si f est **continue** en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$ (on dit alors que ℓ est un point fixe de f).
En particulier, si f est continue sur I, les seules limites possibles dans I pour la suite (u_n) sont les points fixes de f.

Attention !

- Ne pas oublier l'hypothèse de continuité, sans laquelle le théorème est faux.
- Ne pas oublier de considérer aussi les éventuelles limites qui ne sont pas dans I.

Exemple 8.14 :

- Étudier la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.
- Étudier la suite (v_n) telle que $v_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\, v_{n+1} = 1 - v_n^2$.
- Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la suite (w_n) telle que $w_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N},\, w_{n+1} = \frac{1}{2}\left(w_n + \frac{a}{w_n}\right)$.